Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/

Abgabe: Mittwoch, 09.02.2022, 17 Uhr

Aufgabe 45: Welche der folgenden Funktionenfolgen f_n konvergiert gleichmäßig? Bestimme die Grenzfunktion f als punktweisen Grenzwert und prüfe auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Konvergieren auch die Ableitungen f_n' gegen f'?

(i) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, auf dem Intervall $x \in (-1, 1)$; bzw. $x \in (-2021/2022, 2021/2022)$;

(ii) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k \cdot x^k}$, auf dem Intervall $x \in [1, \infty)$;

(iii) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, auf dem abgeschlossenen Intervall $|x| \leq C$;

(iv) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$, auf dem Intervall $x \in [0, \infty)$;

(v) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 46: Betrachte den Raum $\mathcal{BC}^1(I, \mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf dem kompakten Intervall $I = [-1, 1]$. Definiere Normen

$$\|f\|_1 = |f'(1)| + \sup_{x \in I} |f(x)|, \qquad \|f\|_2 = |f(1)| + \sup_{x \in I} |f'(x)|.$$

Zeige, dass dies tatsächlich Normen definiert. Bezüglich welcher dieser Normen ist $\mathcal{BC}^1(I, \mathbb{R})$ vollständig?

Aufgabe 47:

(i) Bestimme durch Anwenden der Additionstheoreme auf den Differenzenquotienten die Ableitung der Cosinusfunktion,

$$\cos' x = -\sin x;$$

(ii) Bestimme durch Anwenden der Ketten- und Produktregeln die Ableitung der Funktion

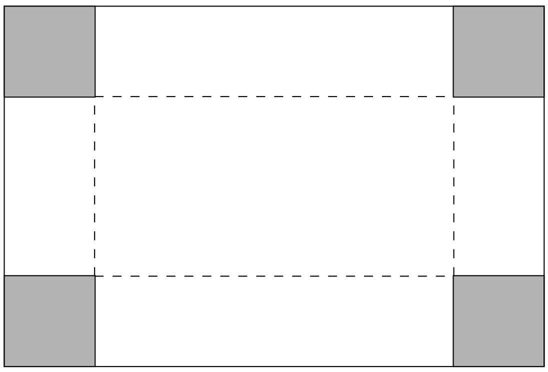
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2 \cos(1/x);$$

(iii) Setze f in $x = 0$ durch $f(0) = 0$ fort und zeige durch Abschätzung des Differenzenquotienten, dass dann die Ableitung in $x = 0$ existiert.

(iv) Zeige, dass $f'(0)$ nicht Grenzwert der Ableitungen $f'(x)$ für $x \to 0$ ist.

Bemerkung: Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar. In $x = 0$ existiert zwar ebenfalls die Ableitung, sie ist dort aber nicht stetig.

Aufgabe 48: Annalyx möchte aus einer rechteckigen Glasplatte mit Kantenlängen $3a$ und $4a$ ein quaderförmiges Aquarium (ohne Deckel) bauen. Dazu schneidet er an den Ecken Quadrate mit Kantenlänge h ab und zerlegt den Rest der Platte in fünf Rechtecke.



Als Tierfreund möchte er seinen Fischen natürlich ein möglichst großes Becken bieten. Wie muss er h wählen, damit das Volumen maximal wird?